

## WEST BENGAL STATE COUNCIL OF VOCATIONAL EDUCATION &amp; TRAINING

Higher Secondary (Vocational) Examination, 2010

CLASS XII

(For Regular &amp; Casual Candidates)

MATHEMATICS

Time Allowed: 3 Hours

Full Marks: 100

*[Answers can be written in English or Bengali or Hindi or Nepali only.]**Answer Question No. 1 which is compulsory and five other questions taking at least two from Group A and Group B.*

1. Answer any ten questions with proper justification:

10×2=20

- (i) If  $3^a + 3^{a-1} = 4$ , then the value of  $a^a$  is
- (a) 3  
 (b)  $\frac{1}{3}$   
 (c) 27  
 (d) None of the above
- (ii) The square roots of  $19 - 4\sqrt{21}$  are
- (a)  $\pm(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$   
 (b)  $\pm(2\sqrt{3} - \sqrt{7})$   
 (c)  $\pm(2\sqrt{7} - \sqrt{3})$   
 (d) None of the above
- (iii) Value of  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$  is
- (a) i  
 (b) -i  
 (c) 1  
 (d) -1
- (iv) If one root of  $5x^2 + 13x + k = 0$  is reciprocal of the other, then
- (a)  $k = 0$   
 (b)  $k = 5$   
 (c)  $k = \frac{1}{5}$   
 (d) None of the above

(v) If  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ , then the value of  $\cos 2\theta$  is

(a)  $\frac{7}{25}$

(b)  $-\frac{6}{25}$

(c)  $\frac{7}{5}$

(d) None of the above

(vi) If  $\sin \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = 2$ , then the value of  $\sin^n \alpha + \operatorname{cosec}^n \alpha$  is

(a) 1

(b) 2

(c)  $\frac{1}{2}$

(d) 8

(vii) If  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ , the value of  $\sin 2\alpha$  is

(a) 0

(b)  $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) 2

(viii) The lateral surface of a right prism with a regular hexagonal base of side 2 cm and height 6 cm is

(a)  $72 \text{ cm}^2$

(b)  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(c)  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(d)  $80 \text{ cm}^2$

(ix) If the points  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  and  $(k, 5)$  are collinear then the value of  $k$  is

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) None of the above

(x) The angle between the lines  $y = x - 3$  and  $y = (2 - \sqrt{3})x$  is

(a)  $45^\circ$

(b)  $60^\circ$

(c)  $30^\circ$

(d) None of the above

(xi) If  $f(x) = \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ , then  $f \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$  is equal to

- (a)  $f(x)$
- (b)  $2f(x)$
- (c)  $f(x^2)$
- (d) None of the above

(xii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  is

- (a) 2
- (b)  $\frac{1}{2}$
- (c) 1
- (d) None of the above

(xiii) The value of  $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 3}$  is

- (a)  $-\frac{1}{2} \log |x^2 + 3| + c$
- (b)  $-\log |x^2 + 3| + c$
- (c)  $\frac{1}{2} \log |x^2 + 3| + c$
- (d)  $\log |x^2 + 3| + c$

(xiv)  $\int_0^2 |x-1| \, dx$  is equal to

- (a) 0
- (b) 1
- (c) -1
- (d) None of the above

(xv) The order and degree of the differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left( y + \frac{dy}{dx} \right)^{3/2}$  is

- (a) 2 and 1
- (b) 2 and 3
- (c) 3 and 2
- (d) None of the above

## Group A

2. (a) If  $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$ , show that  $bx^2 - ax + b = 0$ .

(b) If  $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$  and  $abc = 1$ , then prove that  $x + y + z = 0$ .

(c) If  $\alpha$  and  $\beta$  be the roots of  $x^2 - 2px + q^2 = 0$  and  $\gamma, \delta$  be those of  $x^2 - 2rx + s^2 = 0$  and  $\alpha\delta = \beta\gamma$ , then show that  $p^2s^2 = q^2r^2$ . 6+5+5=16

3. (a) If  $a \neq b$ , but  $a^2 = 5a - 3$  and  $b^2 = 5b - 3$ , find a quadratic equation whose roots are  $\frac{a}{b}$  and  $\frac{b}{a}$ .

(b) If  $z = x + iy$  and  $|z + 6| = |2z + 3|$ . Prove that  $x^2 + y^2 = 9$ , where  $i = \sqrt{-1}$ .

(c) If  $\tan \frac{\theta}{2} = \tan^3 \frac{\phi}{2}$  and  $\tan \phi = 2 \tan \alpha$ , show that  $\theta + \phi = 2\alpha$ . 6+5+5=16

4. (a) If  $A + B = 45^\circ$ , prove that  $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ , hence show that  $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$ .

(b) Solve for  $\theta$ :  $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 1$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .

(c) A vessel in the shape of a right prism with a regular hexagonal base of side 24 cm is filled with 100 litre of water. What will be the level of water in the vessel? 5+5+6=16

5. (a) The base of a right pyramid is a regular hexagon. If its height is 10 cm. and the volume is  $180\sqrt{3}$  c.c., find the length of each side of base. Also find the area of slant surface of the pyramid.

(b) If the points  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$  and  $(1, 1)$  are collinear, then prove that  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

(c) Find the equation of the straight line passing through the intersection of the lines  $4x - 3y = 10$  and  $3x + y = 1$  and perpendicular to the straight line  $5x + 2y = 9$ . 6+5+5=16

## Group B

6. (a) Find the domain of  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$ .

(b) Evaluate:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ .

(c) Evaluate:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\log_e(1+3x)}$ .

6+5+5=16

7. (a) Examine the continuity of the function  $f(x)$  at  $x = 0$  and  $x = 1$ ,

$$\text{where } f(x) = -x, \quad x \leq 0$$

$$= x, \quad 0 < x < 1$$

$$= 2 - x, \quad x \geq 1$$

(b) If  $x = a \sin^2 \theta$  and  $y = b \cos^2 \theta$ , then find the value of  $\frac{dy}{dx}$ .

(c) If  $x^y = y^x$ , then find the value of  $\frac{dy}{dx}$ .

5+5+6=16

8. (a) If  $x = a(\theta + \sin \theta)$  and  $y = a(1 - \cos \theta)$ , then find the value of  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

(b) If  $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ , prove that  $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ .

(c) Evaluate:  $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$ .

6+5+5=16

9. (a) Evaluate:  $\int \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)} (1 + \sin 2x) dx$ .

(b) Evaluate:  $\int \frac{dx}{5+4 \sin x}$ .

(c) Show that:  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$ .

5+5+6=16

10. (a) Solve:  $(1+x^2)y dy + (1+y^2)x dx = 0$ .

(b) Solve:  $(e^{-x} + 1) dy + (e^{-y} + 1) dx = 0$ ; when  $x = 0, y = 0$ .

(c) Evaluate:  $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx$ .

5+5+6=16

## [Bengali Version]

[বাংলা অথবা ইংরেজী অথবা হিন্দী অথবা নেপালীতে উত্তর লেখা যাবে।]

১ নং প্রশ্ন আবশ্যিক এবং বিভাগ-ক ও বিভাগ-খ থেকে কমপক্ষে দুটি করে প্রশ্ন নিয়ে মোট পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর করতে হবে।

1. যথাযথ যুক্তি সহ যে কোন দশটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

১০×২=২০

(i) যদি  $3^a + 3^{a-1} = 4$  হয়, তবে  $a^a$ -এর মান হয়

(a) 3

(b)  $\frac{1}{3}$

(c) 27

(d) উপরের কোনটিই নয়

(ii)  $19 - 4\sqrt{21}$ -এর বর্গমূল হল

(a)  $\pm(2\sqrt{3} + \sqrt{7})$

(b)  $\pm(2\sqrt{3} - \sqrt{7})$

(c)  $\pm(2\sqrt{7} - \sqrt{3})$

(d) উপরের কোনটিই নয়

(iii)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ -এর মান হয়

(a) i

(b) -i

(c) 1

(d) -1

(iv) যদি  $5x^2 + 13x + k = 0$ -এর একটি বীজ অপরটির অনন্যক হয়, তবে  $k$ -এর মান

(a)  $k = 0$

(b)  $k = 5$

(c)  $k = \frac{1}{5}$

(d) উপরের কোনটিই নয়

(v) যদি  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  হয়, তবে  $\cos 2\theta$ -এর মান হয়

(a)  $\frac{7}{25}$

(b)  $-\frac{6}{25}$

(c)  $\frac{7}{5}$

(d) উপরের কোনটিই নয়

(vi) যদি  $\sin \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = 2$  হয়, তবে  $\sin^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha$ -এর মান হয়

(a) 1

(b) 2

(c)  $\frac{1}{2}$

(d) 8

(vii) যদি  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$  হয়, তবে  $\sin 2\alpha$ -এর মান হয়

(a) 0

(b)  $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) 2

(viii) 2 cm বাহু বিশিষ্ট ও 6 cm উচ্চতা বিশিষ্ট সূর্যমুখের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হল

(a)  $72 \text{ cm}^2$

(b)  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(c)  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(d)  $80 \text{ cm}^2$

(ix) যদি  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  এবং  $(k, 5)$  বিন্দুগুলি সমরেখ হয়, তবে  $k$ -এর মান হয়

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) উপরের কোনটিই নয়

(x)  $y = x - 3$  এবং  $y = (2 - \sqrt{3})x$  সরলরেখাখন্ডের মধ্যবর্তী কোণ-এর মান হয়

(a)  $45^\circ$

(b)  $60^\circ$

(c)  $30^\circ$

(d) উপরের কোনটিই নয়

(xi) যদি  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  হয়, তবে  $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  সমান

(a)  $f(x)$

(b)  $2f(x)$

(c)  $f(x^2)$

(d) উপরের কোনটিই নয়

(xii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  হয়

(a) 2

(b)  $\frac{1}{2}$

(c) 1

(d) উপরের কোনটিই নয়

(xiii)  $\int \frac{x dx}{x^2 + 3}$  -এর মান হয়

(a)  $-\frac{1}{2} \log |x^2 + 3| + c$

(b)  $-\log |x^2 + 3| + c$

(c)  $\frac{1}{2} \log |x^2 + 3| + c$

(d)  $\log |x^2 + 3| + c$

(xiv)  $\int_0^2 |x - 1| dx$  হয়

(a) 0

(b) 1

(c) -1

(d) উপরের কোনটিই নয়



(xv)  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}$  অবকল সমীকরণটির ক্রম ও মাত্রা হয়

- (a) 2 এবং 1  
 (b) 2 এবং 3  
 (c) 3 এবং 2  
 (d) উপরের কোনটিই নয়

### বিভাগ ক

2. (a) যদি  $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$  হয়, তবে দেখাও যে  $bx^2 - ax + b = 0$ .

(b) যদি  $a^{1/x} = b^{1/y} = c^{1/z}$  এবং  $abc = 1$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে  $x + y + z = 0$ .

(c) যদি  $\alpha$  ও  $\beta$ ,  $x^2 - 2px + q^2 = 0$ -এর দুটি বীজ হয় এবং  $\gamma$  ও  $\delta$ ,  $x^2 - 2rx + s^2 = 0$ -এর দুটি বীজ হয় এবং  $\alpha\delta = \beta\gamma$ , তবে দেখাও  
 $6+5+5=16$

3. (a) যদি  $a^2 = 5a - 3$  এবং  $b^2 = 5b - 3$  হয়,  $a \neq b$ , একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার বীজদ্বয় হল  $\frac{a}{b}$  এবং  $\frac{b}{a}$ .

(b) যদি  $z = x + iy$  এবং  $|z + 6| = |2z + 3|$  হয়, প্রমাণ কর যে  $x^2 + y^2 = 9$ , যেখানে  $i = \sqrt{-1}$ .

(c) যদি  $\tan^3 \frac{\theta}{2} = \tan^3 \frac{\phi}{2}$  and  $\tan \phi = 2 \tan \alpha$  হয়, তবে দেখাও যে  $\theta + \phi = 2\alpha$ .

6+5+5=16

4. (a) যদি  $A + B = 45^\circ$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে  $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ , সুতরাং দেখাও যে  $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$ .

(b)  $\theta$ -এর মান নির্ণয় কর :  $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 1$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .

(c) একটি ভেসেল সুথম ষড়ভুজ ভূমি বিশিষ্ট লব্ধ প্রিজম, যার ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 24 cm এটি 100 litre জল দ্বারা পূর্ণ। তবে, ভেসেল-এর মধ্যে জলের উচ্চতা নির্ণয় কর।  
 $5+5+6=16$

5. (a) একটি লব্ধ পিরামিডের ভূমি সুথম ষড়ভুজ। যদি এর উচ্চতা 10 cm হয় এবং আয়তন  $180\sqrt{3}$  c.c. হয়, তবে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। আবার পিরামিডটির তির্যক তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(b) যদি  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(1, 1)$  বিন্দুগুলি সমরেখ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ .

(c)  $4x - 3y = 10$  এবং  $3x + y = 1$  সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং  $5x + 2y = 9$  সরলরেখার লম্ব, সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6+5+5=16

## বিভাগ খ

6. (a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$  অপেক্ষকের অঙ্কল নির্ণয় কর।

(b) মান নির্ণয় কর :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$

(c) মান নির্ণয় কর :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\log_e(1+3x)}$

6+5+5=16

7. (a)  $x=0$  এবং  $x=1$  বিন্দুতে  $f(x)$  অপেক্ষকটি সম্তত কি না তা পরীক্ষা কর,

$$f(x) = -x, \quad x \leq 0$$

$$= x, \quad 0 < x < 1$$

$$= 2-x, \quad x \geq 1$$

(b) যদি  $x = a \sin^2 \theta$  এবং  $y = b \cos^2 \theta$ , তবে  $\frac{dy}{dx}$  -এর মান কত?

(c) যদি  $x^y = y^x$  হয়, তবে  $\frac{dy}{dx}$  -এর মান কত?

5+5+6=16

8. (a) যদি  $x = a(\theta + \sin \theta)$  এবং  $y = a(1 - \cos \theta)$ , তবে  $\frac{dy}{dx}$  -এর মান কত?

(b) যদি  $y = ae^{mx} + be^{-mx}$  হয়, তবে প্রমাণ কর  $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ .

(c) মান নির্ণয় কর :  $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

6+5+5=16

9. (a) মান নির্ণয় কর :  $\int \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)} (1 + \sin 2x) dx$ .

(b) মান নির্ণয় কর :  $\int \frac{dx}{5+4 \sin x}$

(c) দেখাও যে :  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$

5+5+6=16

10. (a) সমাধান কর :  $(1 + x^2) y dy + (1 + y^2) x dx = 0$ .

(b) সমাধান কর :  $(e^{-x} + 1) dy + (e^{-y} + 1) dx = 0$ ; যখন  $x = 0, y = 0$ .

(c) মান নির্ণয় কর :  $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx$ .

5+6+5=16